Издательство «Легион»

ЕГЭ. Задание С3: решение **методом рационализации**

Докладчик: Иванов Сергей Олегович

История метода рационализации

Метод рационализации неравенств известен около 50 лет, встречался под названиями:

- метод декомпозиции
- метод замены множителей
- обобщение метода интервалов

Теоретическая основа

- Два неравенства А и В называют равносильными, если множества их решений совпадают.
- Если функция $f(x)$ строго возрастает, то знак выражения $f(x_1) - f(x_2)$ совпадает со знаком выражения $x_1 - x_2$.
- Если функция $f(x)$ строго убывает, то знак выражения $f(x_1) - f(x_2)$ совпадает со знаком выражения $x_2 - x_1$.

Идея метода рационализации

- Есть неравенство вида $\dfrac{u_1 \cdot u_2 \cdot \ldots \cdot u_m}{v_1 \cdot v_2 \cdot \ldots \cdot v_n} > 0.$ (здесь u_i, v_k — константы или выражения, зависящие от x)
- Требуется перед применением метода интервалов заменить все выражения на линейные.
- Любой из множителей можно заменять на совпадающий с ним по знаку.

Замена множителей на примере $h^f - h^g$

Есть множитель $h^f - h^g$, где $h > 0$.

- При $h > 1$ знак $h^f - h^g$ совпадает со знаком $f - g$.
- При $h < 1$ знак $h^f - h^g$ совпадает со знаком $g - f$.
- Следовательно, при всех значениях h знак $h^f - h^g$ совпадает со знаком $(h - 1)(f - g)$.

Таблица замены множителей

Исходный	Новый
$h^f - h^g$, где $h > 0$	$(h-1)(f-g)$
$f^h - g^h$, где $f > 0$, $g > 0$	$(f-g) \cdot h$
$\sqrt[n]{f} - \sqrt[n]{g}$, где $f \geqslant 0$, $g \geqslant 0$	$f - g$
$\log_h f - \log_h g$	$(h-1)(f-g)$
$\log_h f - 1$	$(h-1)(f-h)$
$\log_h f$	$(h-1)(f-1)$
$\|a\| - \|b\|$	$(a-b)(a+b)$

Пример 1. $\log_{\sqrt{x}}(2-x)^4 < 8$

Решите неравенство $\log_{\sqrt{x}}(2-x)^4 < 8$.

(Математика. Подготовка к ЕГЭ-2013)

ОДЗ: $x > 0$, $x \neq 1$, $x \neq 2$.

$\log_{\sqrt{x}}|2-x| < 2,$

$\log_{\sqrt{x}}|2-x| - \log_{\sqrt{x}} x < 0,$

$(\sqrt{x}-1)\big(|2-x|-x\big) < 0,$

$(x-1)(2-x-x)(2-x+x) < 0,$

$(x-1)^2 > 0.$

Ответ: $(0;1) \cup (1;2) \cup (2;+\infty)$.

Пример 2. $\log_{|x-2|}(x^2-1) \leqslant 2$

Решите неравенство $\log_{|x-2|}(x^2-1) \leqslant 2$.

(Математика. Подготовка к ЕГЭ-2013. УТТ)

ОДЗ: $|x| > 1$, $x \neq 2$, $x \neq 3$.

$\log_{|x-2|}(x^2-1) - \log_{|x-2|}(x-2)^2 \leqslant 0$,

$(|x-2|-1)(x^2-1-x^2+4x-4) \leqslant 0$,

$(x-3)(x-1)(4x-5) \leqslant 0$,

$x \in (-\infty; 1] \cup [1{,}25; 3]$. Учтём ОДЗ:

$x \in (-\infty; -1) \cup [1{,}25; 2) \cup (2; 3)$.

Ответ: $(-\infty; -1) \cup [1{,}25; 2) \cup (2; 3)$.

Пример 3. $\log_x(x^3+1)\cdot\log_{x+1}x > 2$

Решите неравенство

$\log_x(x^3+1)\cdot\log_{x+1}x > 2.$

(Математика. Подготовка к ЕГЭ-2013)

ОДЗ: $x > 0,\ x \neq 1.$

$\log_{x+1}(x^3+1) - 2 > 0,$

$\log_{x+1}(x^3+1) - \log_{x+1}(x+1)^2 > 0,$

$(x+1-1)(x^3+1-x^2-2x-1) > 0,$

$x^2(x^2-x-2) > 0,\quad x^2(x+1)(x-2) > 0,$

$x > 2.$ *Ответ:* $(2;+\infty).$

Пример 4. (начало) $\dfrac{\log_x(x+2) - 4\log_{x+2} x}{x(x+2)} \geqslant 0$

Решите неравенство $\dfrac{\log_x(x+2) - 4\log_{x+2} x}{x(x+2)} \geqslant 0.$

(Математика. Подготовка к ЕГЭ-2013)

ОДЗ: $x > 0$, $x \neq 1$.

$$\frac{\log_x^2(x+2) - 4}{\log_x(x+2)} \geqslant 0,$$

$$\frac{(\log_x(x+2) - \log_x x^2)(\log_x(x+2) - \log_x x^{-2})}{\log_x(x+2)} \geqslant 0,$$

$$\frac{(x-1)^2(x+2-x^2)(x+2-x^{-2})}{(x-1)(x+2-1)} \geqslant 0,$$

Пример 4. (окончание) $\dfrac{\log_x(x+2) - 4\log_{x+2} x}{x(x+2)} \geqslant 0$

$$\frac{(x-1)^2(x+2-x^2)(x+2-x^{-2})}{(x-1)(x+2-1)} \geqslant 0,$$

$$\frac{(x-1)(x+1)(x-2)(x^3+2x^2-1)}{x^2(x+1)} \leqslant 0,$$

$$(x-1)(x-2)(x+1)(x^2+x-1) \leqslant 0,$$

$$(x-1)(x-2)\left(x - \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(x + \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \leqslant 0.$$

Ответ: $x \in \left(0; \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\right] \cup (1; 2]$.

Пример 5 (начало).

$$\left(4 - x^{\log_2 x}\right)\left(\log_2 \frac{3x+3}{16} + \log_{3x+3} 16\right) \geqslant 0$$

Решите неравенство

$$\left(4 - x^{\log_2 x}\right)\left(\log_2 \frac{3x+3}{16} + \log_{3x+3} 16\right) \geqslant 0.$$

(Математика. Подготовка к ЕГЭ-2013)

ОДЗ: $x > 0.$

$$\left(2^{\log_2^2 x} - 2^2\right)\left(\log_2(3x+3) - 4 + \frac{4}{\log_2(3x+3)}\right) \leqslant 0,$$

$$\left(\log_2^2 x - 2\right) \cdot \frac{\log_2^2(3x+3) - 4\log_2(3x+3) + 4}{\log_2(3x+3)} \leqslant 0,$$

Пример 5 (окончание).

$$\left(4 - x^{\log_2 x}\right)\left(\log_2 \frac{3x+3}{16} + \log_{3x+3} 16\right) \geqslant 0$$

$$(\log_2^2 x - 2) \cdot \frac{\log_2^2(3x+3) - 4\log_2(3x+3) + 4}{\log_2(3x+3)} \leqslant 0,$$

$$(\log_2 x - \sqrt{2})\left(\log_2 x - (-\sqrt{2})\right) \cdot \frac{(\log_2(3x+3) - 2)^2}{3x+3-1} \leqslant 0,$$

$$(x - 2^{\sqrt{2}})(x - 2^{-\sqrt{2}}) \cdot \frac{(3x-1)^2}{3x+2} \leqslant 0.$$

Ответ: $\left\{\frac{1}{3}\right\} \cup \left[2^{-\sqrt{2}}; 2^{\sqrt{2}}\right]$.

Литература по методу рационализации

1) **Дорофеев Г.В.** Обобщение метода интервалов // Математика в школе, 1969, №3.

2) **Голубев В.** Метод замены множителей // Квант, 2006, №4.

3) **Корянов А.Г., Прокофьев А.А.** Математика ЕГЭ 2011 (типовые задания С3). Методы решения неравенств с одной переменной.

Издательство «Легион»

Сайт `http://legionr.ru`

Электронная почта: `legionrus@legionrus.com`

Почта: 344000, г. Ростов-на-Дону, а/я 550

Тел.: (863) 303-05-50, 248-14-03